Problème 1. Homogénéisation d'une structure périodique
Motivation : Déterminer les propriétés effectives des matériaux composites.

$$(\mathscr{P}_\varepsilon) : -\mathbf{div}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\right) = f \text{ dans } \Omega,\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega),\ a \in C_\sharp^1(Y, \mathbb{R}_+^*) \text{ et } Y = (0,1)^3.$$

Théorème

La suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ solution de $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers la fonction u solution de

$$(\mathscr{P}^{\text{hom}}) : -\mathbf{div}(\mathbf{A}^{\text{hom}}\nabla u) = f \text{ dans } \Omega,\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega),$$

$$(\mathbf{A}^{\text{hom}})_{i,j} = \left(\int_Y a(y)\,\mathrm{d}y\right)\delta_{i,j} + \left(\int_Y a(y)\nabla w_i\,\mathrm{d}y\right)_j,$$

$$\text{où } w_j \text{ solution du problème : } -\mathbf{div}(a(y)\nabla w_i) = \frac{\partial a}{\partial y_j}(y) \text{ dans } Y,\ w_i \in H_\sharp^1(Y).$$

Outils.
Cv. double-échelle (Ngue Tseng 89, Allaire 92) : $f_\varepsilon \in L^2(\Omega) \rightharpoonup\!\!\rightharpoonup f_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ si $\int_\Omega f_\varepsilon u_\varepsilon\,\mathrm{d}x \to \iint_{\Omega\times Y} f_0 u_0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
Propriétés : 1. Si f_ε est bornée dans L^2, alors $f_\varepsilon \rightharpoonup\!\!\rightharpoonup f_0$ et $f_\varepsilon \rightharpoonup f(x) = \int_Y f_0\,\mathrm{d}y$ L^2 faiblement.
2. Si $f_\varepsilon \rightharpoonup f_0$ H^1 faiblement alors $\nabla f_\varepsilon \rightharpoonup \nabla f + \nabla_y f_1(x,y)$.

Preuve.
1. **Estimations à priori.** On multiplie $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ par u_ε, puis on intègre par parties sur Ω. On applique ensuite l'in. de *Poincaré* et de *Cauchy-Schwarz*. On montre ensuite que u_ε est bornée dans $H^1(\Omega)$ et on en déduit que $u_\varepsilon \to u$ L^2 fortement (*Rellich-Kondrakov*), et également $\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla u$ L^2 faiblement, et donc $\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup\!\!\rightharpoonup \nabla u + \nabla_y u_1$. Ainsi $u_\varepsilon \simeq u(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$.
2. **Fonctions tests oscillantes mimiquant le comportement de u_ε.** On choisit une fonction $\phi_\varepsilon = \varphi(x) + \varepsilon\psi(x, x/\varepsilon)$, pour $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\psi \in \mathscr{D}(\Omega; C^\infty_\sharp(Y))$. On multiplie ensuite $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ par celle-ci, on intègre par parties sur Ω, et à la limite $\varepsilon \to 0$ on obtient

$$\iint_{\Omega\times Y} (\nabla_x u + \nabla_y u_1) a (\nabla\varphi + \nabla_y \psi)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_\Omega f\varphi\, \mathrm{d}x.$$

3. **On déduit :** $u_1 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_i} w_i$ et u est solution de $(\mathscr{P}^{\mathrm{hom}})$. ■

Problème 2. "Brouillard de glace" (Domaine perforé avec condition de Dirichlet)
Motivation : Déterminer la température de l'air en présence d'une suspension de glace.

$$(\mathscr{P}_\varepsilon) : -\mathbf{div}\,(a\nabla u_\varepsilon) = f \text{ dans } \Omega,\ u_\varepsilon \in H^1_0(\Omega),\ u_\varepsilon = 0 \text{ dans } B_{r_\varepsilon},$$

$$B_{r_\varepsilon} = \cup_{i\in\mathbb{Z}^3} B(\varepsilon i, r_\varepsilon), \quad Y^i_\varepsilon = \varepsilon(i + Y),\ \textbf{Hypothèse :}\ \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^3} \to \gamma \in (0, \infty)$$

Théorème

La suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ solution de $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers l'unique solution u de $(\mathscr{P}^{\text{hom}}) : -\mathbf{div}(a\nabla u) + 4\pi\gamma u = f$ dans Ω, $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$.
Le terme $4\pi\gamma u$ a d'ailleurs été baptisé "*terme étrange*" (Cionarescu Murat 82).

Preuve.
1. **Estimations à priori.** On multiplie $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ par u_ε, on déduit que u_ε est bornée dans $H^1(\Omega)$ et ainsi que $u_\varepsilon \to u$ dans L^2 fortement et $\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla u$ dans L^2 faiblement. Ici, $u_\varepsilon \sim u$ et u_ε retombe abruptement à 0 dans un petit voisinage des boules.
2. **Fonctions tests oscillantes.** On prend $\phi_\varepsilon = \varphi(1-\theta_\varepsilon)$, où θ_ε solution de
$(\mathscr{P}_\theta) : -\Delta\theta_\varepsilon = 0$, $\theta_\varepsilon = 1$ dans B_{r_ε}, $\theta_\varepsilon = 0$ dans $\Omega \setminus B_{R_\varepsilon}$, pour $r_\varepsilon \ll R_\varepsilon \ll \varepsilon$.
On multiplie $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ par ϕ_ε, on intègre par parties et à la limite quand $\varepsilon \to 0$ on obtient

$$\int_\Omega a\nabla u \nabla\varphi \,\mathrm{d}x + 4\pi\gamma \int_\Omega u\varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}x \quad \forall\varphi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

qui est la formulation variationnelle du problème $(\mathscr{P}^{hom})$. ∎

Conclusion et perspectives.

Problème 1. Études récentes sur des estimations du type $\|u_\varepsilon - u\|_{L^2} \leq c\varepsilon$ par l'école russe.

Problème 2. L'analyse asymptotique de $\rho_\varepsilon \partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f$, où $\rho_\varepsilon = 1 + \frac{1}{\mathrm{mes}(B_{r_\varepsilon})}\mathbf{1}_{B_{r_\varepsilon}}$ est un problème ouvert.